CAPÍTULO 4.

El Cálculo Infinitesimal según Newton y según Leibniz

*"Nada ha estremecido tan profundamente el espíritu humano,
como el infinito". D. Hilbert*

4.0 Antecedentes.

El cálculo infinitesimal, entendido como el proceso de manejar cantidades infinitesimales o valores de dimensión muy pequeña, cantidades, aun más pequeñas que lo microscópico, tiene una historia que se remonta al siglo V AC, cuando Demócrito creó una teoría centrada en el concepto de átomo. Los átomos para Demócrito eran la materia prima de todo ser y que por ser indescomponibles e indestructibles, hacían que la materia no se destruyera, sino que se transformara, conservando por supuesto la energía que llevaba dentro. También Eudoxio y Arquímedes (siglo III AC), trataron con cantidades infinitesimales. En un palimpsesto[1] recuperado a comienzos del siglo XX, se encontró mimetizado, en lo que aparentemente era un libro de oraciones, una de las obras, consideradas desaparecidas de Arquímedes. Nos referimos a "*El Método*". Este trabajo del gran matemático griego, tiene que ver, entre otras cosas, con el cálculo de áreas bajo curvas, usando el método exhaustivo, hoy equivalente en esencia, a la integral de Riemann. Esta obra, parece ser una carta de Arquímedes, dirigida a Eratóstenes, por ese entonces bibliotecario de la universidad de Alejandría, en la que el matemático de Siracusa explica su método en diferentes contextos.

Sin embargo, el método de Arquímedes adolece de ciertos ingredientes que han caracterizado al cálculo infinitesimal, como lo conocemos hoy. El primero de ellos es el concepto de límite, que involucra al infinito actual, idea inalcanzable a la mente humana de esa época, concepción, además, a la que los griegos no eran afines. Su manejo del infinito, sólo llegó al enfoque del infinito potencial, aquel concepto metafísico inalcanzable a la mente humana. El segundo ingrediente es, el proceso algorítmico del que se dispone hoy para englobar problemas análogos dentro de una misma solución. Una tercera limitación fue el desconocimiento de la interrelación, entre el proceso de integración o cálculo de áreas y su proceso inverso, el método de encontrar tangentes, hoy centrado en el cálculo diferencial. Es de notar que las matemáticas en el tiempo de Arquímedes no contaba con un simbolismo que facilitara, operativamente hablando, los cálculos. El simbolismo matemático, en general, es muy reciente en el desarrollo histórico de las matemáticas. En particular, para el cálculo diferencial e integral, su estandarización, viene a darse con la obra de Leonhard Euler en el siglo XVIII. Newton y Leibniz usaron notación diferente para representar los procesos de derivación e integración.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) introdujo un método novedoso, conocido hoy como *método de Cavalieri*, que afirma, entre otras cosas, que, si dos sólidos al ser cortados por planos perpendiculares a ellos, generan superficies de igual área, los sólidos tienen el mismo volumen. Cavalieri fue discípulo y amigo de Galileo, mantuvo una relación estrecha con Kepler y su

---

[1] Un *palimpsesto* es un manuscrito que aparece sobre un papiro o pergamino que previamente se había borrado o barnizado para permitir su reescritura. Esta práctica se siguió en la edad media debido a la escasez de papel o pergamino.

relación epistolar se extendió a Marin Mersenne, Torricelli y Viviani, entre otros. La concepción de este matemático nacido en Milán (hoy Italia), en esa época parte del imperio de los Habsburg, permitió clasificar ciertos sólidos, como sólidos de Cavalieri. Esta concepción hace parte de lo que Cavalieri llamó *Geometria Indivisibilibus* (Geometría de los Indivisibles) que le permitió calcular áreas de superficies, y volúmenes de sólidos en una forma similar al método de Arquímedes.

Cavalieri aplica su método al cálculo de áreas de figuras planas, a veces limitadas por rectas, como en la figura 4.0.1, donde calcula el área del triangulo rectángulo isósceles de lado *a*, suponiendo que el segmento PQ barre la superficie triangular, cuando P se mueve entre A y B y $x = d$ (A, P) [x mide la distancia de A hasta P].

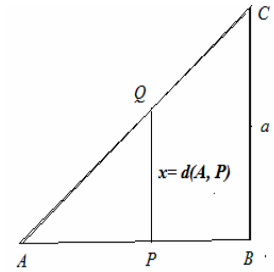

***Fig.* 4.0.1**. *El área del triángulo se puede aproximar sumando un número finito de veces la longitud del segmento PQ, cuando P se mueve entre A y B.*

Intuitivamente sería suponer que la figura se puede llenar con segmentos de longitud x de un grosor lo suficientemente pequeño para lograr una aproximación aceptable. La altura PQ es igual a x, por ser el triángulo isósceles. Al sumar los segmentos y multiplicar por su grosor se obtendría una aproximación al área del triángulo. Supongamos, a guisa de ejemplo que, a =100 mm (A=0, B = 100) y que llenamos el triángulo con 99 “segmentos” interiores o con 100, en una aproximación por exceso, de un grosor de un milímetro (mm), entonces las aproximaciones por defecto y por exceso del área serían:

$$\sum_{i=1}^{i=99} i(mm)(1mm) = (mm)^2 \sum_{i=1}^{i=99} i = 4950(mm)^2 \quad \text{(Aprox. Por defecto)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=100} i(mm)(1mm) = (mm)^2 \sum_{i=1}^{i=100} i = 5050(mm)^2 \quad \text{(Aprox. Por exceso)}$$

Tratándose de área, la métrica es la unidad cuadrada. En este caso usamos para la longitud, el milímetro y así, el área vendrá dada en milímetros cuadrados. Si promediamos las aproximaciones por defecto y exceso, (4950+5050)/2 = 5000, notamos que este valor coincide con el área del triángulo (base por altura dividido dos): 5000 $(\text{mm})^2$. A medida que la métrica se refina, las aproximaciones mejoran y en el límite la métrica toma la forma del diferencial dx, y el área, ignorando dimensiones, viene dada, exactamente por:

$$\int_0^{100} x\,dx = \frac{x^2}{2} \text{ [calculado entre } x\text{=0, y, } x\text{ =100] = 5000.}$$

Donde x corresponde a la ordenada que es también igual a la abscisa del punto Q. El punto Q se desplaza de A hasta C, para generar la hipotenusa del triángulo en cuestión. En la misma forma Cavalieri calculó el área de segmentos parabólicos determinados por funciones del tipo $y = x^n$. Realmente lo que logra, y correctamente, es:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}[\text{calculado entre } x=0, \text{ y, } x = a] = \frac{a^{n+1}}{n+1} .$$

Desde luego, no con el simbolismo, ni con los métodos usados por matemáticos posteriores, si no recurriendo a su método de los indivisibles. Para los detalles de estos procedimientos ver la obra de Edwards[2], en la que se basan estas notas en temas relacionados con cálculo infinitesimal.

Los problemas que tienen que ver con el cálculo de áreas de superficies planas, limitadas por curvas y rectas se conocieron desde la antigüedad con el nombre de problemas de cuadratura. Entre los problemas clásicos griegos, figuró el problema de la cuadratura del círculo, que busca un procedimiento algorítmico que, usando regla y compás solamente, permita construir un cuadrado de área igual al área de un círculo de radio dado. Cuando se encuentra el área de una superficie en unidades cuadradas se está significando que esa superficie en su área coincide con el área de un cuadrado, más exactamente con el cuadrado que tiene por lado la raíz cuadrada de área de la superficie. Por ejemplo, en el caso de un triángulo cuyos lados tienen longitudes de 8 y 4 unidades, su área es 16, que es equivalente al área de un cuadrado de lado 4. Conociendo el área A de una superficie siempre es posible construir un cuadrado que tenga la misma área que la superficie dada. Basta construir el cuadrado de lado $\sqrt{A}$. Esta construcción siempre es posible usando regla y compás (*Fig*. 4.0.2), supuesto A es construible. Por ejemplo, si AB = 1, la diagonal del cuadrado ABCF es $\sqrt{2}$, que se construye transportando AC, con regla y compás sobre la prolongación de AB usando el radio AC del círculo. Debemos destacar el hecho de que constructibilidad y conmensurabilidad son conceptos distintos. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es construible pero no conmensurable.

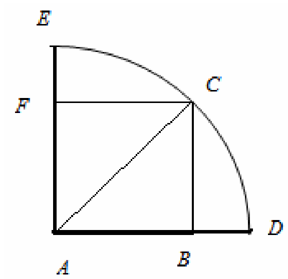

***Fig.* 4.0.2**. Si la longitud de AB es 1, la diagonal AC vale $\sqrt{2}$ y es construible con regla y compás y corresponde a la longitud del radio AD.

Otro precursor del cálculo, a quien no podemos olvidar, fue Johann Kepler (1571-1630), el mismo de las famosas leyes astronómicas, que dieron origen a la astronomía moderna. Su segunda ley afirma que el vector que une un planeta con el sol, barre áreas iguales en tiempos iguales (Fig. 4.0.4). Su prueba recurre a cierta forma, un poco cruda, del cálculo integral. También usa procedimientos similares al cálculo integral para la obtención del volumen de sólidos, incluyendo sólidos de revolución, entre ellos, el toro (Fig. 4.0.3).

[2] EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag. New York. 1979.

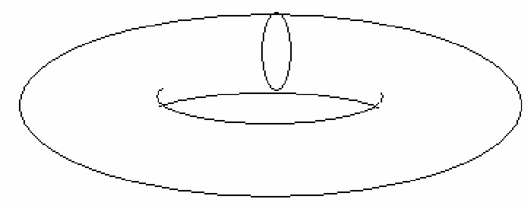

***Fig.* 4.0.3**. El toro se puede interpretar como una superficie de revolución, generada por una circunferencia que gira alrededor de un punto central con radio dado.

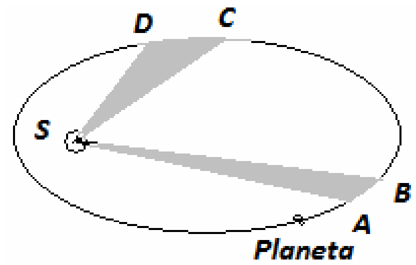

Fig.* 4.0.4**. La segunda ley de Kepler afirma que el radio vector que une al sol con cada uno de los planetas, barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto significa que si el tiempo para pasar de ***A a ***B***, y de ***C*** a ***D***, es el mismo entonces las áreas de las regiones ***SAB*** y ***SCD*** son iguales.

Para terminar este corto listado de quienes contribuyeron de algún modo, al desarrollo del naciente cálculo, citemos a John Wallis (1616-1703). Wallis, profesor en la cátedra *savilliana* de la Universidad de Oxford, publicó en 1655, *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética del infinito), una obra que ejerció enorme influencia en matemáticos posteriores, incluyendo al propio Newton. La cátedra savilliana en Geometría y Astronomía fue fundada por sir Henry Saville, para dignificar a profesores de la Universidad de Oxford. Esta cátedra fue desempeñada por matemáticos famosos, entre ellos, Henry Briggs (a quien debemos los logaritmos vulgares), Edmond Halley (1656-1742) y Christopher Wren (1632-1723). Otra famosa cátedra fue la creada por Henry Lucas en la Universidad de Cambridge y conocida como *cátedra Lucasiana*, ocupada primero por Isaac Barrow (1630-1677) y seis años más tarde por su discípulo Isaac Newton. Hoy está ocupada por Stephen Hawking, el famoso físico, autor, entre otras obras de, *Historia del Tiempo* y *El Universo en una Cáscara de Nuez.*

El trabajo de Wallis en estos temas cubrió casos de integración tanto de potencias racionales como también, con exponentes negativos. Más precisamente, Wallis se propuso la cuadratura de curvas del tipo $y = x^k$, donde k puede tomar valores racionales. Tomemos por caso, para $k = 1/q$, encontró que (*Fig.* 4.0.3):

$$\int_0^1 x^{1/q}dx + \int_0^1 x^q dx = 1,$$

De lo cual deduce que:

$$\int_0^1 x^{1/q}dx = 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{1}{(1/q)+1}.$$

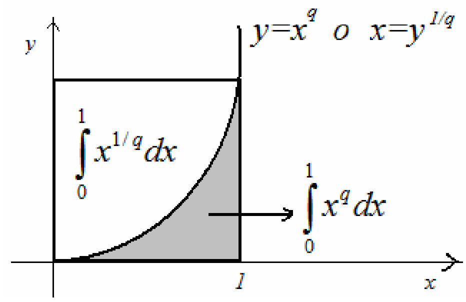

***Fig.* 4.0.5**. *Un ejemplo de cuadratura de parábola estudiada por Wallis. Las integrales dan el área de los segmentos parabólicos reflejados sobre los ejes coordenados.*

El cálculo infinitesimal se fue formando como una acumulación de saberes provenientes de la solución de problemas matemáticos y geométricos de distinta índole. Entre estos problemas citemos algunos.

(i) Cuadratura de superficies.
(ii) Rectificación de curvas.
(iii) Cálculo de tangentes.

Veíamos arriba algunos ejemplos de aportes al cálculo de áreas o de cuadraturas de curvas, miremos en seguida, de qué tratan los casos de rectificación de curvas.

Empecemos por decir qué entendemos por rectificar una curva. Desde la antigüedad griega se buscó rectificar la circunferencia, en el sentido de asimilar su longitud a la longitud de un segmento de recta, o a encontrar una unidad lineal que la mida exactamente. El problema era insoluble por el hecho de que la longitud de la circunferencia es un número irracional y así su longitud está asociada a una magnitud inconmensurable. El estatus del número π, como número irracional, sólo vino a establecerse en el siglo XVIII por el matemático francés, Johann Lambert (1728-1777), sin embargo su valor implícito ya había sido determinado a través de series infinitas o de valores de integrales. En general, el proceso de rectificar segmentos de curvas consiste en hallar su longitud rectilínea, lo que hoy en cálculo integral corresponde a hallar la *longitud de arco* de una curva representada por el gráfico de una función, que permita su “integrabilidad”.

El problema de la rectificación de curvas fue tomado con mucha cautela desde la antigüedad, por cuanto que, los antecedentes relacionados con conmensurabilidad, habían conducido al fiasco de los pitagóricos de pensar que, la diagonal del cuadrado era conmensurable con el lado del mismo, cosa que se demostró como imposible. Con este precedente se sospechaba que las curvas como la parábola y otras curvas algebraicas como, circunferencias, elipses e hipérbolas fueran no rectificables, en el sentido de no poderse construir segmentos rectilíneos con regla y compás de longitud equivalente a la de las curvas en cuestión. No fue sino después de 1650, cuando el matemático inglés William Neil logró la rectificación de la curva algebraica, de ecuación, $y^2 = x^3$, en el intervalo $0 \le x \le a$, usando una partición del intervalo [0, a] en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en los cuales el segmento de curva, s_i, se asemeja a un segmento de recta que une los puntos de la curva (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_i, y_i) (*Fig.* 4.0.6). Aquí la curva tiene representación analítica $y = x^{3/2}$.

El segmento curvilíneo s_i se puede aproximar por la hipotenusa del triángulo que se forma con los segmentos de longitudes $(x_i - x_{i-1})$ y $(y_i - y_{i-1})$. Esta aproximación puede representarse como: $s_i \cong [\,(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\,]^{1/2}$, y la longitud de la curva puede aproximarse como:

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} [\,(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\,]^{1/2}.$$

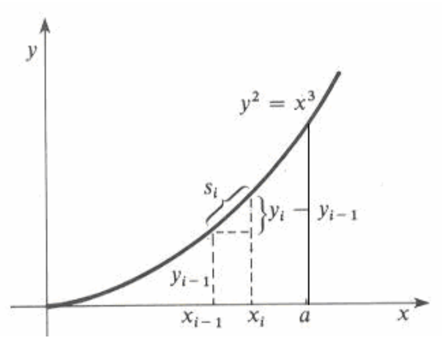

***Fig.* 4.0.6**. La longitud de la curva se puede aproximar por la suma de las hipotenusas de los pequeños triángulos, cuando los valores de x_i van de x_o a a.

Neil recurre luego a la parábola $z = x^{1/2}$, cuya cuadratura se conoce, para calcular la suma anterior y encuentra que $s = [(9a + 4)^{3/2} - 8]/27$.

El cálculo de tangentes a una curva fue tratado por varios matemáticos que antecedieron a Newton y Leibniz, entre ellos, Fermat y Descartes. Los problemas de tangentes están relacionados con la búsqueda de máximos o mínimos de una función. Pierre de Fermat (1601-1665) abordó un problema específico relacionado con la forma de dividir un segmento de longitud b de tal manera que los segmentos resultantes $b - x$, y x, originen un rectángulo de área máxima (*Fig.*4.0.7). Este rectángulo tendría área igual a $x(b-x) = bx - x^2$ y perímetro dado por $2x + 2(b-x) = 2b$.

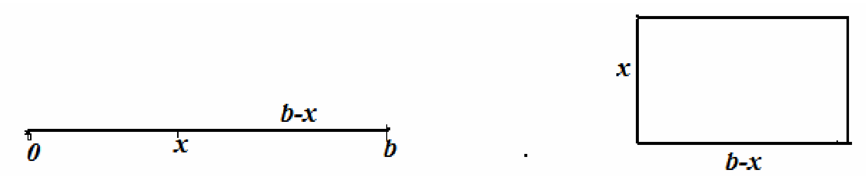

***Fig.* 4.0.7**. Fermat trató de encontrar, analíticamente el punto x, en $[0, b]$, tal que el rectángulo de lados, x, $b-x$, tenga un área máxima.

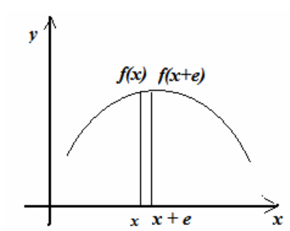

***Fig.* 4.0.8**. *La función $f(x) = bx - x^2$ corresponde al área del rectángulo en función de x, para la cual Fermat encontró el máximo.*

Más precisamente encontrar un x tal que el valor de f(x) = $x(b\text{-}x) = bx - x^2$ sea máximo (*Fig.* 4.0.8). El rectángulo tendrá un perímetro $2(b\text{-}x) + 2x = 2b$, por lo que se busca el rectángulo de perímetro $2b$ que tenga la mayor área. Fermat usa un procedimiento muy cercano a lo que hacemos hoy, cuando se trata de hallar la derivada de f en el punto x. Variando x hasta $x + e$, Fermat observa cómo cambia la función y luego divide por e, lo que en notación moderna sería:

$$[f(x+e) - f(x)]/e = [b(x + e) - (x + e)^2 - bx + x^2]/e = (be - 2xe - e^2)/e = b - 2x + e.$$

Cuando e se hace cada vez más pequeño, el cociente en la izquierda se acerca a la pendiente de la tangente en el punto x, y el miembro de la derecha se acerca a $b - 2x$. Interpretado el procedimiento de Fermat en lenguaje moderno significa que la derivada en el punto máximo de la función se hace cero y así $0 = b - 2x$ y de allí, la función $bx - x^2$ tiene su máximo, en $x = b/2$. La conclusión a que nos lleva Fermat es que de todos los rectángulos de perímetro dado, es el cuadrado el que tiene mayor área, porque el cuadrado en este caso tendrá lado $b/2$ y perímetro $4(b/2) = 2b$.

La idea del procedimiento de Fermat es llegar a la tangente a través de secantes a la curva en puntos cercanos a x, donde queremos encontrar la tangente. Es decir, el cociente visto arriba es, en efecto, la pendiente de la secante que pasa por los puntos (x, $f(x)$) y ($x+e$, $f(x+e)$). Este análisis basado en los infinitesimales, ha cobrado recientemente una validez, la cual no tenía, al menos durante el tiempo en el que la Escuela Bourbaki, desterró del análisis los infinitesimales. Esta validez se la da la teoría de modelos en la lógica preconizada por Abraham Robinson (1918-1974) que permite incluir en el análisis matemático, números reales, infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Estos reales se llaman: *reales no estándar* y serán estudiados en más detalle en la sección 4.7.

Desde el tiempo de Hilbert se ha identificado los números reales con el continuo. Sin embargo esta identificación es una posición filosófica no compartida en general por filósofos y matemáticos. Para Kant, por ejemplo, "… el espacio y el tiempo son *quanta continua*… Puntos e instantes son meras posiciones… y con meras posiciones como constituyentes primarios, no es posible construir ni el espacio ni el tiempo". La posición de L. E. J. Brouwer (1882-1966) es que "El continuo lineal no puede coparse con la interpolación de nuevas unidades y no puede nunca pensarse como una mera colección de unidades". En tiempos recientes René Thom afirmaba, "Un verdadero continuo no tiene puntos". Para otras citas y comentarios sobre el tema ver: Bell, J. L. *Infinitesimals and the Continuum*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 17 No. 2. 1995. (Págs. 55-57).

Estampilla de 2001, emitida en Francia para honrar a Pierre de Fermat (1601-1665) al celebrarse los cuatrocientos años de su nacimiento. Se exhibe en ella, el llamado Último Teorema de Fermat.

Siguiente Sección: ***Newton y el Cálculo Infinitesimal***